ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
Enseignement Secondaire et Technique

Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Formation des Cadres et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2001

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Concours **TSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours TSI, comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Définitions

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on désigne par J_n la fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta)d\theta.$$

Par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles*.

Partie I

1. Montrer que pour tout entier n, la fonction J_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier avec précision le fait que pour tout entier n la fonction J_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout entier n, J_n est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_n) suivante :
$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \qquad (E_n)$$
4. Pour tout entier n, quelle est la dimension de l'espace vectoriel des solutions de (E_n) définies sur $\mathbb{R}_+^*$?
5. Montrer que l'équation différentielle (E_0) admet une solution f définie sur $\mathbb{R}$, développable en série entière de rayon de convergence infini et vérifiant $f(0) = 1$.
(*On pourra supposer l'existence d'une telle solution, identifier les coefficients de la série entière et prouver que la somme de cette série entière convient.*)
6. En justifiant soigneusement la réponse, montrer que l'on a :
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ J_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!\,)^2}.$$
7. Déterminer une valeur approchée de $J_0(1)$ à $\pm 10^{-5}$ près, justifier votre réponse.

Partie II

1. Montrer que J_0 ne s'annule pas sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Pour toute fonction y définie sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, on définit sur ce même intervalle une fonction ϕ_y par $\phi_y = \dfrac{y}{J_0}$.
2. Vérifier qu'il existe une équation différentielle du premier ordre, notée (ε_0), telle que :
y est solution de (E_0) sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ si et seulement si $\dfrac{d\phi_y}{dx}$ est solution de (ε_0) sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

3. Montrer l'existence d'une application ψ définie, continue et bornée sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ telle que (ε_0) s'écrive :
$$z' = \big(-\frac{1}{x} + \psi(x)\big)z. \qquad (\varepsilon_0)$$

4. (a) Exprimer la solution générale z de (ε_0) sous forme intégrale.
   (b) En déduire l'existence d'une solution y_0 de (E_0) sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ telle que $\dfrac{d\phi_{y_0}}{dx}(x) = -\dfrac{1}{x} + \psi_1(x)$, où ψ_1 est une application définie, continue et bornée sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.
   (c) Montrer que cette solution y_0 de (E_0) vérifie $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y_0(x) = +\infty$.

5. Établir l'existence d'une application N_0 définie sur $\mathbb{R}_+^*$ solution de (E_0) qui prolonge y_0 (c'est à dire égale à y_0 sur $]0, \frac{\pi}{2}]$).
   (*On pourra utiliser le théorème d'existence et d'unicité des solutions d'une équation différentielle linéaire*).

6. (a) Soit V l'ensemble des solutions de (E_0) définies sur $\mathbb{R}_+^*$ qui sont bornées au voisinage de 0. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des solutions de (E_0) définies sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Prouver que V est de dimension 1 et trouver une base de V.

Partie III

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} J_0(\sqrt{t})e^{-pt}\,dt$ converge.
   On définit alors l'application F par $F(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} J_0(\sqrt{t})e^{-pt}\,dt$ pour tout $p > 0$.

2. Soit a un réel positif et p un réel strictement positif. Établir la majoration :
$$\Big|\int_a^{+\infty} J_0(\sqrt{t})e^{-pt}\,dt\Big| \leqslant \frac{e^{-ap}}{p}.$$

3. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-pt}\,dt$ converge et vaut $\dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

4. Justifier la convergence et déterminer la somme $g(x)$ de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{4^n n!\, p^{n+1}}$, $x \in \mathbb{R}$ et $p > 0$.

5. Soient $\varepsilon > 0$ et $p > 0$. Montrer qu'il existe $b > 0$ tel que $\frac{e^{-bp}}{p} < \varepsilon$ et $\frac{2}{P}\, e^{-p\frac{b}{2}}\, e^{\frac{1}{2p}} < \varepsilon$.

6. Soit $p > 0$; on choisit un réel b satisfaisant aux conditions de la question précédente.
   (a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geqslant N$ on ait :
$$\frac{b}{4(n+1)^2} < 1, \quad \frac{1}{4^n p^{n+1} n!} < \varepsilon \quad \text{et} \quad \Big|\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^k k!\, p^{k+1}}\Big| < \varepsilon.$$
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\int_b^{+\infty} t^n e^{-pt}\,dt \leqslant n!\,\Big(\frac{2}{p}\Big)^{n+1} e^{-p\frac{b}{2}}$$

et en déduire que

$$\Big|\int_b^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n t^n}{2^{2n}(n!\,)^2}\Big)e^{-pt}\,dt\Big| < \varepsilon.$$

(c) Montrer que

$$\Big|\int_0^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n t^n}{2^{2n}(n!\,)^2}\Big)e^{-pt}\,dt - g(-1)\Big| < \varepsilon.$$

(d) Justifier que pour tout $t \in [0, b]$ on a

$$\Big|\sum_{n=N}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{2^{2n}(n!\,)^2}\Big| \leqslant \frac{t^N}{2^{2N}(N!\,)^2},$$

puis en déduire que

$$\Big|\int_0^{b}\Big(\sum_{n=N}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{2^{2n}(n!\,)^2}\Big)e^{-pt}\,dt\Big| < \varepsilon.$$

(e) En remarquant que $F(p) = \displaystyle\int_0^b J_0(\sqrt{t})e^{-pt}\,dt + \int_b^{+\infty} J_0(\sqrt{t})e^{-pt}\,dt$, déduire de ce qui précède que $|F(p) - g(-1)| < 4\varepsilon$; que vaut alors $F(p)$?

Partie IV

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a : $J_{-n} = (-1)^n J_n$.

2. Pour un réel x fixé on considère les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ R_x(\theta) = \cos(x\sin\theta) \text{ et } I_x(\theta) = \sin(x\sin\theta).$$

   (a) Montrer que les applications R_x et I_x sont 2π-périodiques.

   (b) Pour x fixé, déterminer les coefficients de Fourier de R_x et I_x en fonction de valeurs prises par les applications $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (c) Peut-on affirmer que chacune des fonctions R_x et I_x est égale à la somme de sa série de Fourier ?

3. Montrer que pour tout réel t on a :

$$J_0(t)^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} J_n(t)^2 = 1.$$

4. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodique de période 2 telle que :

$$\forall x \in [-1, 1[,\ f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

   (a) À l'aide d'un changement de variable, montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\cos\theta\, d\theta = 0$.

   (b) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ J_1(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\sin\theta)\sin\theta\, d\theta = \frac{2x}{\pi}\int_0^1 \cos(tx)\sqrt{1 - t^2}dt.$$

   (c) Déterminer les coefficients de Fourier de f en fonction de valeurs prises par J_1.

FIN DE L'ÉPREUVE